(1) 1

SPECIJALNE FUNKCIJE

U ovom delu daćemo neke osnovne postavke i relacije nekih specijalnih funkcija koje se primenjuju u kvantnoj mehanici. Najpre ćemo dati osnove fama funkcije

I. Gama funkcija

Prema Eulerovoj definiciji gama funkcija je

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty \xi^{a-1} e^{-\xi} d\xi$$

Ovaj integral konvergira za $a > 0$ a divergira za $a \leq 0$.

Osnovne osobine: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \overset{t=y^2}{=} 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

a) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{(\pi)}$, a zbog ovg rezultata $\Gamma(1/2)$ dovodi se u vezu sa Poissonovim integralom $\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$. (*) reši im poissonov int

b) $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Zbog ove osobine dovoljno je izračunati gama funkciju u intervalu $0 \leq a < 1$ a ostale lako mogu da se odrede navedenom osobinom. Ako je $a = n$ (ceo pozitivan broj) tada je $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\ldots$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Specijalan slučaj je $0! = \Gamma(1) = 1$. Za $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$ je $\Gamma(a) = \pm\infty$. Ovo je lako pokazati na sledeći način Na osnovu

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$$

sledi

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty, \quad \Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

Definicija gama funkcije može da se proširi i na negativne necele brojeve. Npr.

$$\Gamma(-0,7) = \frac{\Gamma(0,3)}{-0,7} = \frac{\Gamma(1,3)}{(-0,7)(0,3)}$$

$a = -0.7$ $\quad \Gamma(-0.7) = \frac{\Gamma(a+1)}{-0.7}$ $\quad +0.3$

$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

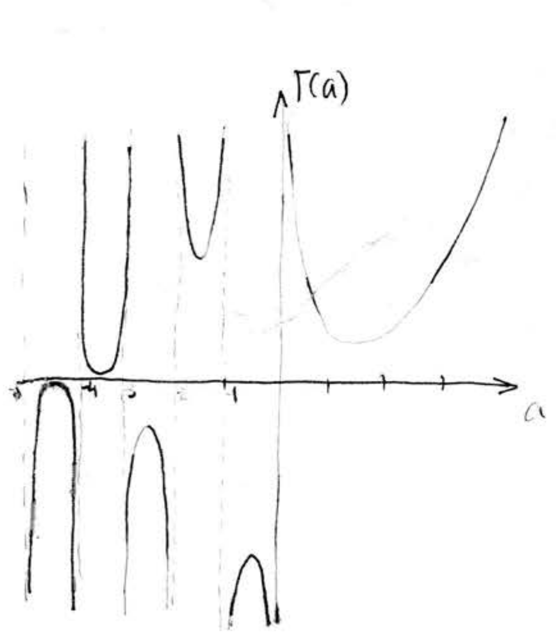
) Za velike vrednosti n važi sledeća asimptotska relacija

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)} \quad (a > 0)$$

Dokaz: $\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^a d\xi$ $\quad u = \xi^a \quad du = a\xi^{a-1} d\xi \quad dv = e^{-\xi} d\xi$

$= [-\xi^a e^{-\xi}]_0^\infty + a\int_0^\infty \xi^{a-1} e^{-\xi} d\xi = a\Gamma(a)$

1. Mitrinović
2. Д. С. КУЗНЕЦОВ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, Москва 1962
3. Z. Wang, D. Guo, Special functions, World Scientific, Singapore 1989
4. I. Sneddon Special functions of mathematical physics and chemistry, London, 1980.



$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\, d$$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\infty} e^{-z}dz = \pi\left(-e^{-z}\right)\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$\rho^2 = z$
$2\rho\, d\rho = dz$

Postoje i druge varijante ove formule ali ih ovde nećemo navoditi. Vidi se da za $a = 0, -1, -2, -3, \ldots \quad \Gamma(a) \to \infty$. Da bi dokazali poslednju relaciju najpre ~~najpre~~ treba izračunati integral (n–ceo broj)

$$I_n(a) = \int_0^n \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n \xi^{a-1} d\xi$$

a zatim se potraži

$$e^{-t} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} I_n(a) = \Gamma(a)$$

Za izračunavanje integrala $I_n(a)$ uvodi se smena $\dfrac{\xi}{n} = \tau$ posle koje integral postaje

$$I_n(a) = n^a \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{a-1} d\tau.$$

Poslednji integral rešavamo parcijalnom integracijom

$$(1-\tau)^n = u$$

$$du = n(1-\tau)^{n-1}(-1)d\tau$$

$$\begin{aligned}
I_n(a) &= n^a \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{a-1} d\tau \\
&= n^a \left[\frac{(1-\tau)^n \tau^a}{a} \bigg|_0^1 + \frac{n}{a} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^a d\tau \right] \\
&= n^a \frac{n}{a} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^a d\tau \\
&= n^a \frac{n}{a} \left[\frac{(1-\tau)^{n-1} \tau^{a+1}}{a+1} \bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{n-1}{a+1} (1-\tau)^{n-2} \tau^{a+1} d\tau \right] \\
&= n^a \frac{n(n-1)}{a(a+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{a+1} d\tau \ldots
\end{aligned}$$

$$(1-\tau)^{n-1} = u$$

n - puta

11. IV 97
7. XI 96.

$$= n^a \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \int_0^1 (1-t)^{n-n} \tau^{a+n-1} d\tau = n^a \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}$$

d)

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Ova relacija može da se dokaže na više načina. Ovde ćemo dati jedan od njih. Polazeći od definicije gama funkcije imamo

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \quad \xrightarrow{\xi = u^2} \quad 2 \int_0^\infty u^{2\alpha-1} e^{-u^2} du$$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \xi^{\beta-1} e^{-\xi} d\xi \quad \xrightarrow{\xi = v^2} \quad 2 \int_0^\infty u^{2\beta-1} e^{v^2} dv$$

17.XI '07

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\, n^{a} = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})}\, n^{a}$$

$$n^{a} = e^{a\ln n} = \exp\left\{a\left[\ln n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n} e^{\frac{a}{m}} \equiv e^{\alpha_n a}\prod_{m=1}^{n} e^{\frac{a}{m}}$$

jer je $e^{-a\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}}\prod_{m=1}^{n} e^{\frac{a}{m}} = e^{-a\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right]} e^{\frac{a}{1}} e^{\frac{a}{2}} \ldots e^{\frac{a}{n}} = 1$

Uvedimo:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln n\right\} = -\lim_{n\to\infty}\alpha_n$$

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})}\, e^{\alpha_n a}\prod_{m=1}^{n} e^{\frac{a}{m}} = \frac{1}{a} e^{-\gamma a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{a}{n}}}{1+\frac{a}{n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}}$$ Weierstrass-ova formula [Vajerštras]

Konstanta γ - naziva se Euler-ova konstanta

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 651\ldots$$

$$n^{z} = \prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}$$ Dokaz da je to tačno je trivijalan.

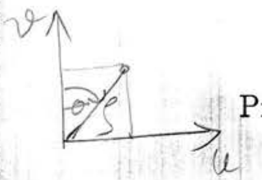
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{z(z+1)\cdots(z+n)}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z} = \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{z}{1})(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$ tj. $$\Gamma(z+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}}$$

Euler's infinite product expression
Ova vel. može da služi za generalnu definiciju.

Množenjem ovih jednačina dobija se

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\alpha-1}v^{2\beta-1}e^{-(u^2+v^2)}dudv$$



Prelaskom na sferne koordinate u ravni (u, v) dobija se

$u = \rho\cos\theta$
$v = \rho\sin\theta$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta d\theta\; \underbrace{2\int_0^\infty \varrho^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-\varrho^2}d\varrho}_{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$dudv = \rho d\rho d\theta$

Pošto poslednji integral u prethodnom izrazu zajedno sa množiteljem 2 predstavlja $\Gamma(\alpha+\beta)$ to možemo da pišemo

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{(\cos^2\theta)^\alpha(\sin^2\theta)^\beta}{\sin\theta\cos\theta}d\theta$$

Ako uvedemo smenu $\boxed{\sin^2\theta = \tau}$ dobijamo integral $\rightarrow 2\sin\theta\cos\theta d\theta = d\tau$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau$$

$\rightarrow \frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = d\tau$

$\frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{d\tau}{2\tau(1-\tau)}$

koji smenom $\dfrac{\tau}{1-\tau} = w$ prelazi u integral

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^\infty \frac{w^{\beta-1}dw}{(1+w)^{\alpha+\beta}}$$

Ukoliko se uzme da je $\alpha+\beta = 1 \quad \alpha,\beta\in(0,1)$ dobija se

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \frac{w^{\beta-1}}{1+w}dw = \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}.$$

vidi pozadi 10

Poslednji integral se najlakše izračunava, prelaskom u kompleksnu ravan, pomoću teoreme o reziduumima.

Prvi čas uvod

$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad a>0,\ b>0$

$B(a,b) = B(b,a)$

ORTOGONALNI POLINOMI I FUNKCIJE

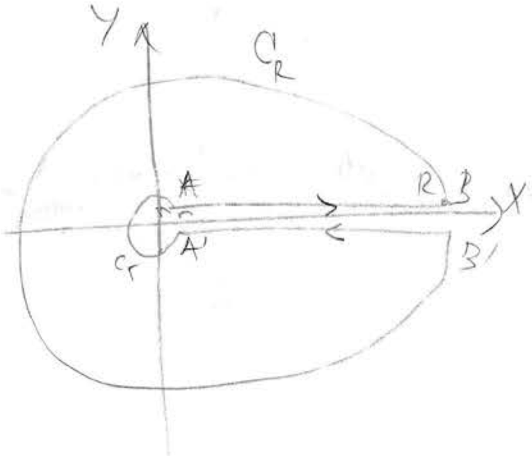
Pre nego počnemo konkretna razmatranja nekih ortogonalnih polinoma i funkcija pomenućemo ovde dve okolnosti koje su od posebne važnosti za dalja razmatranja
A. Iz teorije apstraktnih prostora znamo da je prostor $C_2[a,b]$ separabilan, a pošto je on potprostor prostora $L_2(a,b)$ biće i ovaj separabilan, pa svaki svuda gust skup u $C_2[a,b]$

Posmatrajmo f-ju $g(z)=\dfrac{z^{a-1}}{1+z}$

Singulariteti: $z=-1$ i $z=0$

Pretpostavimo da arg. komp broja z varira od 0 do 2π

Odaberimo konturu kao na slici



$$\oint_C \frac{z^{a-1}}{1+z}dz = \int_r^R \frac{z^{a-1}}{1+z}dz + \int_{C_R}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz + \int_{C_r}\frac{z^{a-1}}{1+z}dz + \int_R^r \frac{z^{a-1}}{1+z}dz = 2\pi i \operatorname*{Rez}_{z=-1} g(z)$$

Kad tačka z, polazeći od B, stigne u B' njen argument u tački B' je 2π

$$\int_R^r \frac{z^{a-1}}{1+z}dz = \int_R^r \frac{e^{(a-1)[\ln|z|+2\pi i]}}{1+|z|e^{2\pi i}}\, d|z|\, e^{2\pi i} = e^{2\pi i(a-1)}\int_R^r \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}d\rho$$

argument za deo $B'A'$ je 2π

$$\left[\begin{array}{l} z=|z|e^{i\arg(z)} \\ \ln z = \ln|z| + i\arg z \end{array}\right]$$

$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$\rho = |z|$

$$\int_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx + e^{2\pi i(a-1)}\int_R^r \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \left[1-e^{2\pi i(a-1)}\right]\int^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{1}{1-e^{2\pi i(a-1)}}\cdot 2\pi i \lim_{z\to -1} z^{a-1} = \frac{2\pi i\, e^{\pi i(a-1)}}{1-e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{-\pi}{\sin(a-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$\lim_{z\to-\alpha} z^{a-1} = \lim_{z\to-\alpha} e^{(a-1)\ln z} = e^{(a-1)\ln(-\alpha)} = e^{(a-1)[\ln|-\alpha| + i\arg(-\alpha)]}$$

$$= e^{(a-1)[\ln|\alpha|]}\, e^{(a-1)i\arg(-\alpha)} = |\alpha|^{a-1} e^{(a-1)i[\pi+\arg\alpha]}$$

$\arg(-\alpha) = \pi + \arg\alpha$

$\arg(-1) = \pi$

kada je $\alpha = 1$

$\lim_{z\to -1} z^{a-1} = e^{(a-1)i\pi}$

$(-1) = e^{i\pi}$

$(-1)^{a-1} = e^{(a-1)i\pi}$

(4)

biće svuda gust i u $L_2(a,b)$. U daljem razmatranju mi ćemo se ograničiti na razmatranje skupova svuda gustih u $C_2[a,b]$.

START → B.) Ako su $x(t)$ i $y(t) \in L_2(a,b)$ onda se može definisati i mnoštvo tzv. *ponderisanih skalarnih proizvoda* koji su oblika

$$(x,y) = (L)\int_a^b \varrho(t)\overline{x(t)}y(t)dt$$

Dopunska funkcija koja se javlja u ovom izrazu zove se *težina skalarnog proizvoda* (za standardni skalarni proizvod očevidno je $\varrho(t) \equiv 1$ u celom intervalu (a,b)). Da bi napisani izraz zadovoljavao aksiome skalarnog proizvoda treba $\varrho(t)$ da bude *realna* (zbog ermitske simetrije), *pozitivna* (zbog nenegativnosti skalarnog proizvoda (x,x)) i *integrabilna* funkcija. Ovo poslednje je potrebno radi toga, da bi skalarni proizvod, tj. napisani integral uopšte postojao.

U daljem razmatranju ograničićemo se na potprostor $C_2[a,b]$ koji čine *realne funkcije* pa je zbog toga

$$(x,y) = (R)\int_a^b \varrho(t)x(t)y(t)dt$$

Opšta svojstva ortogonalnih polinoma

Definicije:

a) Neka je $\{q_n(t)\}$ neki skup realnih *polinoma*, pri čemu $q_n(t)$ označava realni polinom n-tog stepena. Ovi polinomi će biti *uzajamno ortogonalni* (sa težinom $\varrho(t)$) u intervalu (a,b) ukoliko za bilo koje cele brojeve n i k važi

$$\int_a^b \varrho(t)q_n(t)q_k(t)dt = 0 \qquad (n \neq k)$$

b) Veličina

$$||q_n(t)|| = +\sqrt{\int_a^b \varrho(t)q_n^2(t)dt}$$

zove se norma polinoma $q_n(t)$.

NE c) Skup $\{q_n(t)\}$ *normirani sistem* (uzajamno ortogonalnih realnih polinoma), ako sadrži *po jedan* polinom *svih nenegativnih stepena*, tj. ako je

$$\{q_n(t)\} = \{q_0(t), q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dots\}$$

Posledice definicija

TEOREMA (1) Bilo koji realni polinom m-tog stepena, $Q_m(t)$ predstavlja linearnu kombinaciju polinoma $q_0(t)$, $q_1(t), \dots, q_m(t)$. Drugim rečima može se pisati

5

8

$$Q_m(t) = \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu q_\nu(t)$$

Zaista, sa obe strane ove relacije nalaze se polinomi m-tog stepena pa je koeficijente C_ν moguće jednoznačno odrediti. Zahvaljujući ortogonalnosti polinoma $\{q_n(t)\}$, ako obe strane gornje relacije pomnožimo sa $\varrho(t)q_\nu(t)$ i integralimo u granicama od a do b dobiemo

$$\int_a^b \varrho(t)q_k(t)Q_m(t)dt = \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu \underbrace{\int_a^b \varrho(t)q_k(t)q_\nu(t)dt}_{\delta_{k\nu}\|q_k\|^2} = C_k\|q_k(t)\|^2$$

odakle se dobija

$$C_k = \frac{1}{\|q_k(t)\|^2}\int_a^b \varrho(t)q_k(t)Q_m(t)dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

U poslednjoj relaciji prepoznajemo Fourierove koeficijente, a deljenje kvadratom norme javlja se zbog toga što do sada nismo zahtevali da polinomi budu normirani.

TEOREMA (2) Svaki polinom $Q_m(t)$ m-tog stepena, ortogonalan je, sa težinom $\varrho(t)$, u intervalu (a, b), svim polinomima iz skupa $\{q_n(t)\}$ čiji je stepen veći od m. Zaista, za svako $r = 1, 2, \ldots$ imaćemo

$$\int_a^b \varrho(t)Q_m(t)q_{m+r}(t)dt = \int_a^b \left[\varrho(t)q_{m+r}(t)\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu q_\nu(t)\right]dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu \int_a^b \varrho(t)q_\nu(t)q_{m+r}(t)dt = 0$$

(3) U svakom ~~normalnom~~ sistemu uzajamno ortogonalnih polinoma (u intervalu (a, b), sa težinom $\varrho(t)$), *sve nule* svakog od polinoma *proste su* (jednostruke) i nalaze se u intervalu (a, b).

Zapazimo da $q_0(t)$ mora biti konstanta različita od nule jer je sistem normalan. Dakle, $q_0(t) = \alpha$. Vrednost ove konstante za sada nije bitna. Pošto su svi $q_n(t)$, sa $n > 0$ ortogonalni na $q_0(t)$ može da se piše

$$\int_a^b \varrho(t)q_n(t)dt = 0$$

(Ovo je skalarni proizvod (q_0, q_n) podeljen sa α). Ovaj uslov znači da funkcija $q_n(t)$ nije istog znaka u celom intervalu (a, b), već *na izvesnim mestima menja znak*, tj. ima jednostruke nule. Neka su to neke tačke $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ($k \geq 1, t_i \in (a, b)$ i $t_i \neq t_j$). Na osnovu toga može da se piše

$$q_n(t) = (t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_k)\varphi_k(t) \qquad (*)$$

Teorema 3. Polinom $q_n(t)$ datog ortogonalnog sistema polinoma sa težinom $\varrho(t)$ u intervalu (a,b) ima tačno n-različitih nula, koje su u intervalu $[a,b]$

Dokaz: Zapazimo da $q_0(t)$ mora biti konstanta $\neq 0$ jer je sistem normiran. Dakle $q_0(t)=\alpha$. Pošto su svi $q_n(t)$, sa $n>0$ ortogonalni na $q_0(t)$ =>

$$\int_a^b \varrho(t)\, q_n(t)\, dt = 0$$

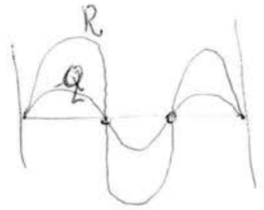
=> da polinom $q_n(t)$ menja znak u datom intervalu [$\varrho(t)$ - nenegat

Neka $q_n(t)$ m-puta $(m \geq 1)$ menja znak u tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_m$ intervala $[a,b]$. Obrazujmo polinom

$$R_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$$

Očigledno da polinom $\underline{q_n(t)R_m(t)}$ ima konstantan znak u intervalu (a,b) i onda je:

$$\int_a^b \varrho(t)\, q_n(t)\, R_m(t)\, dt \neq 0$$



Ova nejednačina je moguća samo za $\underline{m=n}$.

18.XII '97

TEOREMA SVAKA tri redosledna polinoma datog ortogonalnog sistema polinoma povezana su rekurentnom formulom:

$$\alpha_{n+1} Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x) Q_n(x) + \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) = 0$$

$\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ su potpuno određene konstante.

DOKAZ: Polinom $x Q_n(x)$ je $(n+1)$-og stepena i može da se predstavi kao lin. kombinacija polinoma $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_{n+1}(x)$.

$$x Q_n(x) = \alpha_0 Q_0(x) + \alpha_1 Q_1(x) + \cdots + \alpha_{n+1} Q_{n+1}(x) \tag{1}$$

Izmnožimo prethodnu j-nu sa $\rho(t) Q_i(x)$ gde $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ i integralimo u intervalu $[a, b]$

$$\underbrace{\int_a^b \rho(x) Q_n(x) [x Q_i(x)] \, dx}_{= \emptyset \text{ zbog ortogonalnosti}} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \int_a^b \rho(x) Q_k(x) Q_i(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \alpha_i \int_a^b \rho(x) Q_i^2(x) \, dx = \emptyset$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \text{za} \quad i = \emptyset, 1, 2, \ldots, n-2.$$

Tada j-na (1) postaje:

$$x Q_n(x) = \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) + \alpha_n Q_n(x) + \alpha_{n+1} Q_{n+1}(x)$$

tj. $\alpha_{n+1} Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x) Q_n(x) + \alpha_{n-1} Q_{n-1}(x) = \emptyset.$

Težinska f-ja.   Vuci p. 92.   6

Definicija F-ja $w(t)$ naziva se težinska f-ja na konačnom intervalu (a,b), ako je na tom intervalu ona nenegativna integrabilna i ako je njen integral pozitivan tj. ako je:

$$w(t) \geq 0 \qquad i \qquad 0 < \int_a^b w(t)\,dt < \infty$$

Ako je interval beskonačan, tada pored pomenutih uslova potrebno je da apsolutno konvergiraju integrali

$$w_n = \int_a^b t^n w(t)\,dt, \quad n=0,1,2,\dots$$

6

9

pri čemu $\varphi_k(t)$ predstavlja polinom stepena $n-k$ koji u intervalu (a,b) ne menja znak, a pritom je $k \le n$. Pretpostavimo da je $k < n$. Prema stavu (1), polinom

$$R_k(t) = (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_k)$$

može da se napiše u obliku

Ne

$$R_k(t) = a_0 q_0(t) + a_1 q_1(t) + \cdots + a_k q_k(t),$$

pri čemu je $a_k \neq 0$ jer inače R_k nebi bio polinom k-tog stepena. Prema stavu (2), $R_k(t)$ će, kao polinom k-tog stepena, biti ortogonalan na $q_n(t)$ jer je $n > k$ po pretpostavci. Prema tome pišemo

$$\int\limits_a^b R_k(t) q_n(t) \varrho(t) dt = 0$$

odnosno

$$\int\limits_a^b R_k^2(t) \varphi_k(t) \varrho(t) dt = 0.$$

Poslednji integral, međutim, ne može nikako biti nula *jer je integrand svuda u (a,b) istog znaka*. Dakle, pretpostavka $k < n$ dovela je do kontradikcije, a to znači da nemože biti $k < n$. Očevidno je da nemože $k > n$ pa ostaje jedino da bude $k = n$ a u tom slučaju je $\varphi_k(t)$ konstanta, pa iz (*) vidimo da $q_n(t)$ ima tačno n nula u intervalu (a,b).

(4) Sve nule izvoda $q_n'(t)$, kod normalnog skupa uzajamno ortogonalnih polinoma (u (a,b) sa težinom $\varrho(t)$) takođe su proste i nalaze se u (a,b). Ovo sledi iz činjenice poznate iz matematičke analize da se između dve nule diferencijabilne funkcije $f(t)$ mora nalaziti bar jedna nula izvoda $f'(t)$.

2. Legendreovi polinomi

2.1. Generatrisa

$$\psi(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\tau+\tau^2}} \tag{2.1}$$

Funkcija ψ posmatrana kao funkcija promenljive τ (pri čemu je t parametar) analitička je u $\tau = 0$, pa se u ostalim tačkama može razviti u red $\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\psi}{d\tau^n}\right)_{\tau=0}$

$$\psi(t,\tau) = P_0(t) + P_1(t)\tau + P_2(t)\tau^2 + \cdots + P_n(t)\tau^n + \ldots \tag{2.2}$$

Koeficijenti $P_n(t)$ kao što ćemo kasnije videti su polinomi po t i to su *Legendreovi polinomi*. Zabeležimo pre ovoga da se za $t = \pm 1$ dobija

$$\psi(\pm 1,\tau) = \frac{1}{1 \mp \tau} \equiv 1 \pm \tau + \tau^2 \pm \tau^3 + \tau^4 \pm \tau^5 + \ldots$$

tako da se odmah vidi da je

$$P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^n \tag{2.3}$$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=0} = 1$ $f'' = \frac{2}{(1-x)^3}\Big|_{x=0} = 2$

$f'''(x) = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}\Big|_{x=0} = 6$

$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

(7)

Dokazivanje tvrđenja da su koeficijenti razvoja (2.2) zaista polinomi zasniva se na *Cauchyjevoj integralnoj teoremi* iz teorije analitičkih funkcija.

$$f(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-t} dz \tag{2.4}$$

gde je C bilo koja zatvorena kontura koja obuhvata tačku $z \equiv t$ i unutar koje nema drugih singulariteta integranda. Diferenciranjem po parametru t nalazimo

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \tag{2.5}$$

U našem slučaju:

$$\psi(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(t,z)dz}{z-\tau}$$

Na osnovu ove relacije i formule (2.2) čitamo

$$\frac{d^n \psi(t,\tau)}{d\tau^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(t,z)}{(z-\tau)^{n+1}} dz$$

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \psi}{\partial \tau^n} \right)_{\tau=0} = \frac{1}{n!} \left[\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(t,z)}{z^{n+1}} dz \right]$$

C je sada kontura koja obuhvata tačku $z = 0$. Dakle:

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(t,z)}{z^{n+1}} dz \tag{2.6}$$ 14.XI 96

Ako u poslednjem integralu izvršimo smenu

$$\sqrt{1-2tz+z^2} = 1 - z\xi; \quad \underline{z = 2\frac{\xi - t}{\xi^2 - 1}}, \quad \Rightarrow \quad dz = -2\frac{\xi^2 - 2t\xi + 1}{(\xi^2-1)^2} d\xi,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{1 - \xi\dfrac{2(\xi - t)}{\xi^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(\xi^2-1)^{n+1}}{(\xi - t)^{n+1}} \cdot \frac{-2(\xi^2 - 2t\xi + 1)}{(\xi^2-1)^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{2^n} \frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi - t)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \cancel{\frac{1}{2^n}} \frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-t)^{n+1}} d\xi \right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

$f(\xi)$ $\quad f(t)$

$$\frac{d^n(\xi^2-1)^n}{dt^n} \rightarrow \text{prema (2.5)}$$

Uporedimo li ovo sa opštom formulom (2.5) čitamo:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \tag{2.8}$$

8

11

Ovaj rezultat je poznat kao Rodrigesova formula. U literaturi se često Rodrigesova formula uzima za definiciju Legendreovih polinoma. Iz nje se neposredno vidi da $P_n(t)$ mora da bude polinom n-tog stepena. Zabeležimo

$$
\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \\
P_1(t) &= t, \\
P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\
P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \\
P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3),
\end{aligned}
$$

$f_0 = (t^2-1)^n$

diskut

Takođe napomenimo da je

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t). \tag{2.9}$$

3. Legendreova diferencijalna jednačina

Rodrigesova formula omogućava da se nađe diferencijalna jednačina koju zadovoljavaju funkcije $P_n(t)$. Pođimo od

$$w(t) = (t^2 - 1)^n$$

Neposrednim diferenciranjem ove jednačine dobijamo

$$w' = n(t^2 - 1)^{n-1}\, 2t = \frac{2nt}{t^2 - 1} w$$

odnosno

$$(t^2 - 1)w' - 2ntw = 0 \tag{2.10}$$

Ovaj identitet ćemo diferencirati $(n + 1)$ puta, koristeći pritom Leibnitzovu formulu za izvode proizvoda

$$
\begin{aligned}
F(t) &= u(t)v(t) \\
F'(t) &= u'v + uv' \\
F''(t) &= u''v + 2u'v' + uv''
\end{aligned}
$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$F^{(s)}(t) = u^{(s)}v + \binom{s}{1} u^{(s-1)} v' + \binom{s}{2} u^{(s-2)} v'' + \cdots + uv^{(s)}$$

Primena poslednjih formula na (2.10) imamo

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[(t^2 - 1)w'\right] = (t^2 - 1)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} w' + \binom{n+1}{1} 2t \frac{d^n}{dt^n} w' + \binom{n+1}{2} 2 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} w'$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[2ntw] = 2nt\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}w + \binom{n+1}{1}2n\frac{d^n}{dt^n}w,$$

a to znači da je

$$(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}w^{(n)} + 2(n+1)t\frac{d}{dt}w^{(n)} + n(n+1)w^{(n)} - \\ - 2nt\frac{d}{dt}w^{(n)} - 2(n+1)nw^{(n)} = 0.$$

Sređivanjem se dobija

$$(t^2-1)\frac{d^2}{dt^2}w^{(n)} + 2t\frac{d}{dt}w^{(n)} - n(n+1)w^{(n)} = 0.$$

Množenjem poslednje relacije konstantom $-1/2^n n!$ dobija se

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0 \tag{2.11}$$

Ovo je diferencijalna jednačina koju zadovoljavaju Legendreovi polinomi. Ova jednačina je specijalni slučaj *Legendreove diferencijalne jednačine* koja je oblika

$$\begin{gathered}(1-t^2)y'' - 2ty' + \sigma(\sigma+1)y = 0\\ \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)y'\right] + \sigma(\sigma+1)y = 0\end{gathered} \tag{2.12}$$

Vidimo da je Legendreov polinom $P_n(t)$ jedno partikularno rešenje Legendreove diferencijalne jednačine u slučaju da je $\sigma = n$ ili $\sigma = -(n+1)$ pri čemu je n ceo nenegativan broj.

4. Osnovne rekurentne formule

Na osnovu činjenice da za Legendreove polinome postoji generatrisa:

$$\psi(t,\tau) = (1-2t\tau+\tau^2)^{-1/2} = P_0(t) + P_1(t)\tau + P_2(t)\tau^2 + \cdots + \ldots \tag{2.13}$$

može se pokazati da Legendreovi polinomi zadovoljavaju izvesne rekurentne formule, koje su vrlo važne u radu sa Legendreovim polinomima. Rekurentne formule možemo dobiti ako (2.13) diferenciramo po t i po τ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\tau\psi}{1-2t\tau+\tau^2} = P_0' + P_1'\tau + P_2'\tau^2 + \cdots + P_n'\tau^n + \ldots\\ \frac{\partial\psi}{\partial\tau} &= \frac{(t-\tau)\psi}{1-2t\tau+\tau^2} = P_1 + 2P_2\tau + 3P_3\tau^2 + \cdots + nP_n\tau^{n-1} + \ldots\end{aligned} \tag{2.14}$$

Posmatrajmo najpre drugu od ovih relacija. Ona može da se napiše u obliku

$$(t-\tau)\psi = (1-2t\tau+\tau^2)(P_1 + 2P_2\tau + 3P_3\tau^2 + \cdots + nP_n\tau^{n-1} + \ldots)$$

Ako se ψ izrazi iz (2.13) nalazimo dalje

$$\begin{aligned}&(t-\tau)(P_0(t)+P_1(t)\tau+P_2(t)\tau^2+\dots P_n(t)\tau^n+\dots)=\\=&(1-2t\tau+\tau^2)(P_1+2P_2\tau+3P_3\tau^2+\dots+nP_n\tau^{n-1}+\dots)\end{aligned}$$

Ako se obe strane izmnože član po član i srede a zatim izjednače koeficijenti uz iste stepene promenljive τ dobija se prva od traženih rekurentnih formula. Izjednačavanjem koeficijenata uz τ^n imaćemo za $n \neq 0$

$$tP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2ntP_n + (n-1)P_{n-1}$$

kad se ovo sredi dobija se

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0} \tag{2.15}$$

Ako se analogno postupi sa prvom od relacija (2.14) dobija se (izjednačavanjem koeficijenata uz τ^{n+1})

$$\boxed{P_n(t) = P'_{n+1}(t) - 2tP'_n(t) + P'_{n-1}(t)} \tag{2.16}$$

U praksi se najčešće koristi jedna druga rekurentna relacija koja se dobija kombinovanjen relacija (2.15) i (2.16). Diferenciranjem (2.15) po t dobija se

$$(n+1)P'_{n+1} - (2n+1)P_n - (2n+1)tP'_n + nP'_{n-1} = 0$$

odakle se dobija

$$\begin{aligned}tP'_n &= \frac{1}{2n+1}\left[-(2n+1)P_n + (n+1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}\right]\\ &= -P_n + \frac{(n+1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Zamenom poslednje relacije u (2.16) dobija se, posle elementarnih sređivanja

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right] \tag{2.18}$$

Ovo pokazuje da se raznim transformacijama rekurentnih formula mogu dobiti neke druge rekurentne formule koje su možda zgodnije za neke primene.

Napomena I: Navedene rakurentne formule mogu se dobiti i direktno iz Rodrigesove formule i Legendreove diferencijalne jednačine.

Napomena II: Iz relacije (2.15) vidi se da se svi Legendreovi polinomi mogu dobiti na osnovu poznavanja $P_0(t) \equiv 1$ i $P_1(t) \equiv t$.

Napomena III: Na osnovu relacije (2.18) vidimo da se *neodređeni integral* bilo kog Legendreovog polinoma može napisati kao

$$\int P_n(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}(t) - P_{n-1}(t)\right]$$

(11)

Specijalni slučaj ove relacije je $\int_{-1}^{+1} P_n(t)\,dt = 0$.

14

25. XII '97

5. Ortogonalnost Legendreovih polinoma

Legendreovi polinomi su ortogonalni, sa težinom $\varrho(t) = 1$, u intervalu $(-1, +1)$. Posmatrajmo dva Legendreova polinoma $P_n(t)$ i $P_k(t)$ $(n \neq k)$. Ovi zadovoljavaju odgovarajuće Legendreove diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_n'(t)\right] + n(n+1)P_n(t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_k'(t)\right] + k(k+1)P_k(t) = 0$$

Pomnožimo prvu od ovih jednačina sa $P_k(t)$ a drugu sa $P_n(t)$ pa oduzmimo drugu od prve. Rezultat navedenih operacije je

$$\begin{aligned} P_k(t)\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_n'(t)\right] - P_n(t)\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_k'(t)\right] + \\ + \left[n(n+1) - k(k+1)\right]P_n(t)P_k(t) = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Kod prva dva člana poslednje relacije može da se primeni identitet koji se koristi pri parcijalnoj integraciji $u\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(uv) - v\dfrac{du}{dt}$. Primenom ovog identiteta dobija se

$$P_k(t)\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_n'(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_n'P_k\right] - (1-t^2)P_n'P_k'$$
$$P_n(t)\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_k'(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_k'P_n\right] - (1-t^2)P_k'P_n'$$

Ao se ova dva izraza oduzmu jedan od drugog pa unesu u (2.19) dobija se:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)(P_n'P_k - P_k'P_n)\right] + \left[n(n+1) - k(k+1)\right]P_nP_k = 0.$$

Integracijom poslednjeg izraza u granicama od -1 do $+1$ nalazimo

$$\left[n(n+1) - k(k+1)\right]\int_{-1}^{+1} P_n(t)P_k(t)\,dt = 0$$

što se, ako je $n \neq k$ svodi na *uslov ortogonalnosti*

$$\int_{-1}^{+1} P_n(t)P_k(t)\,dt = 0 \qquad n \neq k \tag{2.20}$$

6. Norma Legendreovih polinoma

15

Legendreovi polinomi definisani na ovaj način *nemaju jediničnu normu* tj. obrazuju *ortogonalan* ali ne i *ortonormirani sistem*. Da bismo prešli na ortonormirani sistem polinoma u intervalu $(-1,+1)$ treba ih podeliti pripadajućim normama, tj. obrazovati polinome

$$\Pi_n(t) = \frac{1}{||P_n(t)||} P_n(t) \tag{2.21}$$

Najpre treba izračunati norme polinoma $P_n(t)$ u smislu skalarnog proizvoda sa kojim radimo (skalarnog proizvoda čija težina je $\varrho(t) = 1$)

$$||P_n(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} P_n(t)\frac{1}{n}\left[(2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t)\right]\,dt$$

(jedno $P_n(t)$ zamenjeno je prema rekurentnoj formuli (2.15) uz $n \to n-1$). Ako desnu stranu poslednje relacije podelimo na dva integrala ~~prvi~~ drugi otpada zbog ortogonalnosti Legendreovih polinoma (2.20) pa ostaje

$$||P_n(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t)\,dt = \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{+1} tP_n(t)P_{n-1}(t)\,dt \tag{2.22}$$

Izraz $tP_n(t)$ opet zamenjujemo prema (2.15) za $n \to n$ pa je

$$||P_n(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t)\,dt = \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{+1} P_{n-1}(t)\left[\frac{(n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t)}{2n+1}\right]\,dt$$

Ovaj izraz opet podelima na dva integrala od kojih prvi otpada zbog ortogonalnosti a drugi daje

$$||P_n(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t)\,dt = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2(t)\,dt = \frac{2n-1}{2n+1}||P_{n-1}||^2 \tag{2.23}$$

Izraz (2.23) je rekurentna formula za norme Legendreovih polinoma. Primenom na konkretne slučajeva $n = 1, 2, \ldots$ ova daje

$$\begin{aligned}
||P_1(t)||^2 &= \frac{1}{3}||P_0(t)||^2 \\
||P_2(t)||^2 &= \frac{3}{5}||P_1(t)||^2 \\
||P_3(t)||^2 &= \frac{5}{7}||P_2(t)||^2 \\
&- - - - - - - - - - - - - \\
||P_n(t)||^2 &= \frac{2n-1}{2n+1}||P_{n-1}(t)||^2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ako sve jednačine (2.24) izmnožimo, pa skratimo sve što može dobijamo

$$||P_n(t)||^2 = \frac{1}{2n+1}||P_0(t)||^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Veličina $||P_0(t)||^2$ lako se nalazi jer je $P_0(t) = 1$ pa je $||P_0(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} dt = 2$ a na osnovu toga konačno imamo

$$||P_{\cancel{0}\,n}(t)||^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{2.25}$$

21.XI

Dakle Legendreovi polinomi obrazuju skup uzajamno ortogonalnih funkcija, ali ne i jedan ortonormirani sistem jer norme polinoma nisu jednake jedinici.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

7. Potpunost skupa Legendreovih polinoma

Potpunost skupa Legendreovih polinoma sledi iz teoreme koja glasi: Svaka funkcija $f(t)$, neprekidna u intervalu $(-1, +1)$ i ortogonalna (sa težinom $\varrho(t) \equiv 1$ u istom intervalu) na sve Legendreove polinome, identički je jednaka nuli ($f(t) \equiv 0$).

Uvedimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [-1, +1] \\ 0 & t \notin [-1, +1] \end{cases} \tag{2.26}$$

Ova funkcija je sigurno kvadratno integrabilna u intervalu $(-\infty, +\infty)$ (tj. pripada prostoru $C_2(-\infty, +\infty)$ a time i $L_2(-\infty, +\infty)$) tako da postoji njena *Fourierova transformacija*

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{2.27}$$

Pošto je funkcija $e^{i\omega t}$ *svuda analitička* biće to i funkcija $\tilde{g}(\omega)$, jer napisani integral *nije nesvojstven*. Zato *postoje izvodi* funkcije $\tilde{g}(\omega)$, tako da se ova funkcija može razvti u red.

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{g}(0) + \omega \tilde{g}'(0) + \frac{\omega^2}{2!} \tilde{g}''(0) + \frac{\omega^3}{3!} \tilde{g}'''(0) + \dots + \frac{\omega^k}{k!} \tilde{g}^{(k)}(0) + \dots \tag{2.29}$$

Pri ovome je

$$\tilde{g}'(\omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{g}''(\omega) = \frac{i^2}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^2 f(t) e^{i\omega t} dt, \dots$$

$$\tilde{g}^{(k)}(\omega) = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^k f(t) e^{i\omega t} dt \tag{2.30}$$

Pošto se t^k može prikazati kao linearna kombinacija prvih k Legendreovih polinoma $t^k = \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu P_\nu(t)$ nalazimo:

$$\tilde{g}^{(k)}(0) = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^k f(t) dt = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu P_\nu(t) dt \equiv 0$$

Veličina $||P_0(t)||^2$ lako se nalazi jer je $P_0(t) = 1$ pa je $||P_0(t)||^2 = \int_{-1}^{+1} dt = 2$ a na osnovu toga konačno imamo

$$||\cancel{P_0}(t)||^2 = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{2.25}$$

n

21.XI

Dakle Legendreovi polinomi obrazuju skup uzajamno ortogonalnih funkcija, ali ne i jedan ortonormirani sistem jer norme polinoma nisu jednake jedinici.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

7. Potpunost skupa Legendreovih polinoma

Potpunost skupa Legendreovih polinoma sledi iz teoreme koja glasi: Svaka funkcija $f(t)$, neprekidna u intervalu $(-1, +1)$ i ortogonalna (sa težinom $\varrho(t) \equiv 1$ u istom intervalu) na sve Legendreove polinome, identički je jednaka nuli ($f(t) \equiv 0$).

Uvedimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [-1, +1] \\ 0 & t \notin [-1, +1] \end{cases} \tag{2.26}$$

Ova funkcija je sigurno kvadratno integrabilna u intervalu $(-\infty, +\infty)$ (tj. pripada prostoru $C_2(-\infty, +\infty)$ a time i $L_2(-\infty, +\infty)$) tako da postoji njena *Fourierova transformacija*

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{2.27}$$

Pošto je funkcija $e^{i\omega t}$ *svuda analitička* biće to i funkcija $\tilde{g}(\omega)$, jer napisani integral *nije nesvojstven*. Zato *postoje izvodi* funkcije $\tilde{g}(\omega)$, tako da se ova funkcija može razvti u red:

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{g}(0) + \omega \tilde{g}'(0) + \frac{\omega^2}{2!} \tilde{g}''(0) + \frac{\omega^3}{3!} \tilde{g}'''(0) + \dots + \frac{\omega^k}{k!} \tilde{g}^{(k)}(0) + \dots \tag{2.29}$$

Pri ovome je

$$\tilde{g}'(\omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t f(t) e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{g}''(\omega) = \frac{i^2}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^2 f(t) e^{i\omega t} dt, \dots$$

$$\tilde{g}^{(k)}(\omega) = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^k f(t) e^{i\omega t} dt \tag{2.30}$$

Pošto se t^k može prikazati kao linearna kombinacija prvih k Legendreovih polinoma $t^k = \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu P_\nu(t)$ nalazimo:

$$\tilde{g}^{(k)}(0) = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} t^k f(t) dt = \frac{i^k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} f(t) \sum_{\nu=1}^{k} C_\nu P_\nu(t) dt \equiv 0$$

jer je po pretpostavci funkcija $f(t)$ ortogonalna na sve Legendreove polinome. Lako se vidi da je i $\tilde{g}(0) = 0$ (ortogonalnost funkcije $f(t)$ na polinom $P_0(t) \equiv 1$), tako da su svi koeficijenti ravoja (2.30) jednaki nuli, tj. $\tilde{g}(\omega) \equiv 0$. Primenimo li inverznu Fourierovu transformaciju

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \Rightarrow \quad g(t) \equiv 0 \quad \text{u} \quad (-\infty, +\infty)$$

na osnofu koje se vidi da je $f(t) \equiv 0$ u intervalu $(-1, +1)$ što je trebalo i pokazati. Dakle, jedina neprekidna funkcija ortogonalna na sve Legendreove polinome (u $[-1, +1]$ sa težinskom funkcijom $\varrho(t) \equiv 1$) je funkcija $f(t) \equiv 0$. Prema definiciji, to znači da je skup Legendreovih polinoma *potpun* u $C_2[-1, +1]$.

8. Legendreove funkcije (Legendreovi polinomi jedinične norme

Već smo pokazali da funkcije

$$\Pi_n(t) = \frac{1}{||P_n(t)||} P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \tag{2.31}$$

čine jedan potpuni ortonormirani sistem u $C_2[-1, +1]$. Na osnovu ove tvrdnje možemo reći da *bilo koja* neprekidna funkcija može da se napiše u obliku Fourierovog razvoja

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \Pi_\nu(t), \qquad A_\nu = (\Pi_\nu, F) = \int_{-1}^{+1} \Pi_\nu(t) F(t)\, dt \tag{2.32}$$

Ovaj rezultat može da se proširi i na funkcije koje nisu neprekidne, ali su *deo po deo glatke* u $[-1, +1]$. Za takve funkcije može se izračunati integral u (2.32) u Riemanovom smislu deleći interval integracije na podintervale u kojima je integrand neprekidna funkcija.

U tačkama gde je $F(t)$ neprekidna funkcija, Fourierov razvoj konvergira (u smislu metrike koja izvire iz razmatranog skalarnog proizvoda) ka vrednosti $F(t)$. U onim tačkama $t = t^*$gde je ona prekidna, Fourierov razvoj konvergira ka $\frac{1}{2}[F(t^* - 0) + F(t^* + 0)]$. Ovaj iskaz je poznat kao *teorema Steklova* i ovde je navodimo bez dokaza.

Funkcije koje pripadaju $L_2(-1, +1)$ razlikuju se od deo po deo glatkih funkcija samo u prebrojivo mnogo tačaka, pa ako u (2.30) uzmemo Lebeguesove integrale, dobićemo Fourierov razvoj koji skoro svuda konvergira ka polaznoj funkciji. U tačkama gde se funkcija razlikuje od deo po deo glatke funkcije razvoj može konvergirati nečem drugom.

Suma $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \Pi_\nu(t)$ element je lineala nad Legendreovim funkcijama, a ovaj je svuda gust u $C_2[-1, +1]$. Dakle, izborom dovoljno velikog n može se učiniti

$$\varrho\left(F(t), \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu \Pi_\nu(t)\right) < \varepsilon$$

tj. funkcija $F(t)$ može se aproksimirati sa željenom tačnošću.